6 - Дәріс

Тақырыбы: **Анықталған интегралдың физикада, геометрияда қолданылуы. Ауданды, көлемді, беттің ауданын, қисық ұзындығын, массаны, статикалық моменттерді табу.**

Анықталған интегралдың қолданылуы қисық доғасының ұзындығы.

Егер

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ a\le t\le b \tag{1}$$

теңдеулеріндегі φ мен ψ функциялары $[a,b]$-да үзіліссіз болса, онда ол теңдеулер t параметрінің көмегімен берілген жазықтықтағы үзіліссіз қисықты анықтайды. t параметрі өссе $(\varphi(t),\psi(t))$ нүктесі жазықтықта қозғалып отырады. t-нің әртүрлі мәндеріне, мысалы, $t=t_1,\ t=t_2\ \ (t_1\ne t_2)$ мәндеріне жазықтықтың бір ғана нүктесі сәйкес келуі де мүмкін:

$$(\varphi(t_1),\psi(t_1))=(\varphi(t_2),\psi(t_2)).$$

Егер $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларының $[a,b]$-да үзіліссіз туындылары бар болса және

$$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2>0,\ \forall t\in[a,b] \tag{2}$$

орындалса, онда (1) - жатық қисық деп аталады.

Мысалы $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}\ -\infty<t<\infty$

теңдеулері – жарты өстері a мен b болатын эллипсті параметрлік түрде анықтайды. Бұл – жатық қисық, өйткені, $x=a\cos t$ мен $y=b\sin t$ функцияларының туындылары $(-\infty;+\infty)$ аралығында үзіліссіз және $(0<b\le a)$

$$x'(t)^2+y'(t)^2=(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2\ge b^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=b^2>0,\ \forall t\in(-\infty;+\infty),$$

яғни, (2)-шарт орындалады.

Егер $$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t) \end{cases}\quad a\le t\le b \tag{3}$$

теңдеулеріндегі φ,ψ,χ функциялары $[a,b]$-да үзіліссіз болса, онда олар кеңістіктегі үзіліссіз қисықты анықтайды. Ол қисықты Γ арқылы белгілейік.

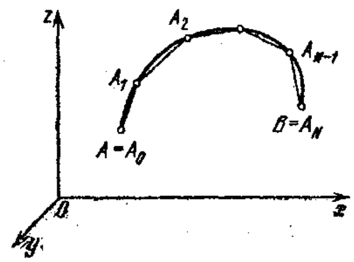
Егер φ,ψ,χ функцияларының $[a,b]$-да үзіліссіз туындылары бар және олар бір мезгілде нөлге тең емес, яғни

$$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2>0,\ \forall t\in[a,b]$$

болса, онда Γ - **жатық қисық** деп аталады.

Енді Γ үзіліссіз **қисық доғасының ұзындығы** туралы түсінікті енгізейік. Γ үзіліссіз қисығы (3) теңдеулер арқылы берілсін. $[a,b]$ кесіндісін

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$$



1-сурет

мәндерімен бөліктейміз. Әрбір t_k мәніне $A_k \in \Gamma$ нүктесі сәйкес келеді $(A_0 = A,\ A_N = B$, 1-сурет). A_k нүктелерін тізбектеп $A_k A_{k+1}$ кесінділерімен қоссақ, Γ қисығына іштей сызылған $\Gamma_N = A_0 A_1 \ldots A_N$ сынығы шығады. Оның ұзындығы $|\Gamma_N|$, бөліктерінің ұзындықтары:

$$|A_k A_{k+1}| = |(\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}), x(t_{k+1})) - (\varphi(t_k), \psi(t_k), x(t_k))| =$$

$$= |(\varphi(t_{k+1}) - (\varphi(t_k), \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k), \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k)| =$$

$$= |(\Delta\varphi(t_k), \Delta\psi(t_k), \Delta\chi(t_k))| = \sqrt{\Delta^2\varphi(t_k) + \Delta^2\psi(t_k) + \Delta^2\chi(t_k)}\,. \qquad (4)$$

Егер $\max\limits_{k=0,1,\ldots,N-1} \Delta t_k \to 0\ (\Delta t_k = t_{k+1} - t_k)$ нөлге ұмтылғанда $|\Gamma_N|$ - ұзындығының ақырлы шегі бар болса, онда ол Γ **доғасының ұзындығы** деп аталады, оны $|\Gamma|$ арқылы белгідейміз:

$$|\Gamma| = \lim_{\max\Delta t_k \to 0} |\Gamma_N| \qquad (5)$$

Бұл жағдайда қисық **түзелетін қисық** деп аталады.

Теорема. $\Gamma:\ \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases},\quad a \le t \le b$

теңдеулерімен берілген **жатық қисық** түзелетін қисық және оның ұзындығы

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt \qquad (6)$$

тең.

а) Егер $\Gamma = A\breve{B} \subset R_2$, яғни, қисық жазықтықта орналасса, онда $z = \chi(t) \equiv 0$ деп алынады да, оның ұзындығы

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (7)$$

б) $\Gamma \subset R_2$ қисығы үзіліссіз дифференциалданатын

$$\Gamma:\ y = f(x),\ \ a \le x \le b \qquad (8)$$

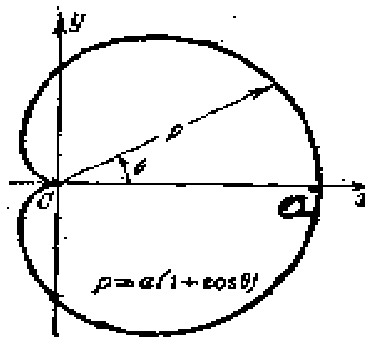
функциясы арқылы берілсе, онда

$$\Gamma:\ \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \qquad a \le x \le b$$

яғни, қисықты x - параметрі арқылы берілді деп есептеуге болады. Олай болса, (7) бойынша

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,, \qquad (9)$$

Мысал. $L : \rho = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$ -кардиоиданың ұзындығын табу керек (2-сурет).



2-сурет

Қисық Ox өсіне салыстырғанда симметриялы болғандықтан, оның жарты бөлігінің $(0 \le \theta \le \pi)$ ұзындығын табамыз.

$$\frac{1}{2}|L| = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta d\theta} = a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta} = 2a\int\limits_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta =$$

$$= \left|0 \le \theta \le \pi \Rightarrow 0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} \ge 0\right| = 2a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4a$$

$$|L| = 8a.$$

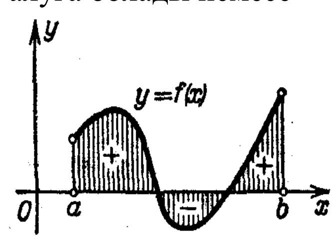
Жазық фигураның ауданы. Егер $[a,b]$ кесіндісінде функция $f(x) \ge 0$ болса, онда анықталған интеграл анықтамасы бойынша $y = f(x)$ қисығымен, Ox-өсімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен шенелген қисықсызықты трапеция ауданы

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx \tag{1}$$

тең.

1) Егер $[a,b]$-де $f(x) \le 0$ болса, онда (1) анықталған интеграл да $\int\limits_a^b f(x)dx \le 0$ болады, ал оның абсолют шамасы сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданына тең: $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$

2) Егер $f(x)$ таңбасы $[a,b]$-де ақырлы сан рет өзгерсе, онда $y = f(x)$, Ox, $x = a$, $x = b$ қисықтарымен шенелген жазық фигура ауданы үшін $[a,b]$ кесіндісін $f(x)$ таңбасы тұрақты болатындай бөліктерге бөліп, осы бөліктер бойынша алынған интегралдардың абсолют шамаларының қосындысын алуға болады немесе



3-сурет

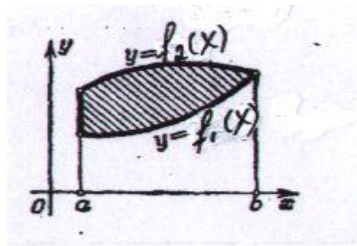
$$S = \int\limits_a^b |f(x)|dx \tag{2}$$

интегралын есептеу керек (3-сурет).

3) Егер $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ $(f_1(x) \le f_2(x), \forall x \in [a,b])$ қисықтарымен шенелген фигура ауданын табу керек болса, онда

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (3)$$

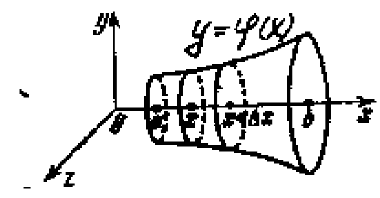
аламыз (4 сурет).



4 – сурет

Айналу дененің көлемі.

Тікбұрыш x, y координаталар жүйесінде үзіліссіз оң $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ функциясымен сипатталған Γ қисығы берілсін. Γ қисығының x өсін айналуынан шыққан бетпен және $x = a$, $x = b$ жазықтықтарымен шенелген айналу денесінің V көлемін есептеу керек болсын (5-сурет).



5 – сурет

$[a,b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен бөліктейміз де $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ жазықтықтарымен шенелген дене көлемінің ΔV_k элементінің жуық мәні – биіктігі $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ және радиусі $y_k = \varphi(x_k)$ болатын цилиндр көлеміне тең деп санаймыз:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi \varphi^2(x_k)\Delta x_k$$

$$V_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(x_k)\Delta x_k$$

шамасы V -ны жуық түрде өрнектейді және

$$V = \lim_{\max\limits_k \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(x_k)\Delta x_k$$

Айналу денесінің көлемі:

$$V = \pi \int_a^b \varphi^2(x)dx. \qquad (1)$$